

Уральское отделение АН СССР
Отдел проблем проектирования
неоднородных конструкций ИМСС
Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола
Производственное объединение "УралаЗ"

ПРОБЛЕМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
КОНСТРУКЦИЙ

Сборник кратких сообщений
II Уральского семинара

Миасс - 1989

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Оболочки вращения сложной формы, выполненные из композитных материалов, являются распространенными элементами машиностроительных конструкций. Анизотропия (неортоотропия) физико-механических свойств слоев, низкая поперечная жесткость, большая деформативность делают неприменимыми традиционные подходы для расчета прочности, устойчивости и колебаний таких упругих систем [1].

В настоящей работе в рамках квадратичного варианта геометрически нелинейной термоупругости дана постановка задачи о предварительно деформированном теле, обобщающая на случай термического нагружения [2], представлены конечноэлементные формулировки задач, а также проведен спектральный анализ матриц жесткости конечных элементов (КЭ) с целью установления формы элемента, обеспечивающей наилучшую устойчивость численных алгоритмов при пространственном расчете слоистых анизотропных оболочек.

Рассмотрим три состояния оболочки, характеризуемые температурой T , объемом V , поверхностью S , ограничивающей оболочку, плотностью ρ , объемными p_v и поверхностными p_s нагрузками, полями перемещений u , деформацией E ,

$$E = (N + N^T + N^T N) / 2 \quad (1)$$

($N_{ij} = u_{i,j}$ — градиент перемещений) и напряжением

$$\sigma = B E - \theta \beta, \quad \beta = B \alpha. \quad (2)$$

В соотношениях Дюгамеля—Неймана (2) тензор жесткости B для каждого слоя отвечает общему случаю анизотропии и содержит 21 различную компоненту; все 6 компонент тензора температурных удлинений и сдвигов α не равны нулю; θ — изменение температуры. В естественном состоянии нагрузки отсутствуют, и указанные величины имеют значения $\bar{T}, \bar{V}, \bar{S}, \bar{\rho}; \bar{p}_v = 0, \bar{E} = 0, \bar{\sigma} = 0$: в начальном состоянии $\bar{\theta} = (\bar{T} - \bar{T})$, $\bar{p}_v, \bar{p}_s, \bar{u}, \bar{V}, \bar{S}, \bar{\rho} (\partial u / \partial t = 0)$. Отклоненное состояние вызывается малыми возмущениями внешних воздействий $\varepsilon \tilde{p}_v, \varepsilon \tilde{p}_s, \theta = \bar{\theta} + \varepsilon \tilde{\theta}$.

Тогда

$$u = \dot{u} + \varepsilon \ddot{u}(t). \quad (3)$$

Считая деформации малыми,

$$\|\tilde{E}_{ij}\| \ll 1, \quad V \cong \dot{V} \cong \ddot{V}, \quad S \cong \dot{S} \cong \ddot{S}, \quad \rho \cong \dot{\rho} \cong \ddot{\rho}, \quad (4)$$

разрешающие соотношения получим из принципа Гамильтона—Остроградского для случая "мертвых" сил и температурных воздействий [3]:

$$\text{где} \quad \delta J = \int_{t_0}^t dt \delta [(F-A)-K] = 0, \quad (5)$$

$$F = \int_V \left[\frac{1}{2} B E^2 - \theta \beta E - \frac{c_\varepsilon \theta^2}{2T} \right] dV; \quad (6)$$

$$A = \int_V p_v u dV + \int_S p_s u dS; \quad (7)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV \quad (8)$$

свободная энергия, работа внешних сил и кинетическая энергия соответственно.

Подставляя значения (3) в уравнение (I), разложим деформации по степеням ε :

$$E = \dot{E} + \varepsilon \ddot{E} + \varepsilon^2 \ddot{\ddot{E}}, \quad (9)$$

$$\text{где} \quad \dot{E} = (\dot{H} + \dot{H}^T + \dot{H}^T \dot{H})/2; \quad \ddot{E} = [(I + \dot{H}^T) \ddot{H} + (I + \dot{H}) \ddot{H}^T]/2, \quad (10)$$

$$\ddot{\ddot{E}} = \ddot{H}^T \ddot{H}/2, \quad E_L = (H + H^T)/2.$$

Аналогичным образом поступим и с соотношениями (6)—(8), подставляя в них выражения (3), (9) и сохраняя лишь малые величины до порядка ε^2 :

$$\delta F = \delta F_0 + \varepsilon \delta F_1 + \varepsilon^2 \delta F_2 + o(\varepsilon^3),$$

$$\delta A = \delta A_0 + \varepsilon \delta A_1 + \varepsilon^2 \delta A_2, \quad \delta K = \varepsilon^2 \delta \left[\frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}^2 dV \right], \quad (II)$$

$$\delta J = \delta J_0 + \varepsilon \delta J_1 + \varepsilon^2 \delta J_2 + o(\varepsilon^3). \quad (I2)$$

Для решения уравнения (5) необходимо выполнить аналогичные равенства для множителей при всех степенях ε в уравнении (I2), что с учетом выражений (9)—(II) приводит к следующим вариационным формулировкам:

$$\dot{\varepsilon} \delta (F_0 - A_0) = 0 \Rightarrow \delta \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2} B \dot{E}^2 - \theta \beta \dot{E} \right] dV - \int_V \dot{p}_v \dot{u} dV - \int_S \dot{p}_s \dot{u} dS \right\} = 0 \quad (I3)$$

(принцип Лагранжа для равновесия в начальном состоянии);

$$\varepsilon^2 \int_{t_0}^t dt \delta \left[(F_2 - A_2) - \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\ddot{u}}^2 dV \right] = 0,$$

откуда с учетом соотношений (4) и следующих из них приближенных равенств $I + \dot{H}^T \cong I$, $I + \dot{H} \cong I$, $\ddot{E} \cong \ddot{E}_L$ получим принцип Гамильтона—Остроградского для отклоненного состояния:

$$\int_{t_0}^t dt \delta \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2} B \ddot{E}_L^2 - \theta \beta \ddot{E}_L + (B \dot{E} - \theta \beta) \ddot{E} \right] dV - \right.$$

$$-\left(\int_V \tilde{p}_v \tilde{u} dv + \int_S \tilde{p}_s \tilde{u} ds\right) - \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\tilde{u}}^2 dv = 0; \quad (I4)$$

считая $(\dots) = \delta(\dots) \Rightarrow \tilde{E} = \delta \dot{E}$, при выполнении соотношения (I3) $\epsilon^i \delta(F_i - A_i) = 0$.

Используем полученные вариационные формулировки для решения пространственных задач термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения, осесимметрично нагруженных и нагретых в начальном состоянии, методом конечных элементов. Поскольку задача определения начального состояния $(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{E}}, \dot{\tilde{\sigma}})$ в изложенной постановке (I3) полностью решена [4], наиболее актуальными являются проблемы устойчивости и свободных колебаний. В обоих случаях трехмерную задачу сведем к совокупности двумерных, используя разложение решения в ряды Фурье по окружной координате [5]. При этом с учетом анизотропии \sin и \cos - гармоники для каждой компоненты вектора перемещений являются связанными и вектор решения для каждого номера n -разложения содержит амплитуды перемещений $\tilde{u}_{\sin}^{(n)}(r, z)$, $\tilde{u}_{\cos}^{(n)}(r, z)$. Задаваясь линейной локальной аппроксимацией [4] для $\tilde{u}_{\sin}^{(n)}(r, z)$ и $\tilde{u}_{\cos}^{(n)}(r, z)$, считая $\tilde{u} = 0$, $\tilde{p}_v = 0$, $\tilde{p}_s = 0$, $\tilde{u} \neq 0$ и переходя в уравнении (I4) от варьирования к дифференцированию по компонентам вектора $\tilde{U} = [\tilde{u}_{rs}^i, \tilde{u}_{\theta s}^i, \tilde{u}_{zs}^i, \tilde{u}_{rc}^i, \tilde{u}_{\theta c}^i, \tilde{u}_{zc}^i, \dots, \tilde{u}_{zc}^N]^T$ (N - число узлов), получаем конечно-элементный эквивалент уравнений устойчивости (индекс номера гармоники n опускаем):

$$[K_L + G(\dot{\sigma}_*, \dot{U}_*)] \tilde{U} = 0, \quad \tilde{U} \neq 0. \quad (I5)$$

Здесь

$$[K_{Lij}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{U}_i \partial \tilde{U}_j} \frac{1}{2} \int_V B \tilde{E}_L^2 dv \right] \quad (I6)$$

линейная матрица жесткости;

$$[G_{ij}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{U}_i \partial \tilde{U}_j} \int_V (B \dot{E} - \dot{\sigma} \beta) \tilde{E} dv \right] \quad (I7)$$

матрица геометрической жесткости.

При нелинейном начальном состоянии должна решаться последовательность задач для нахождения нуля определителя $\det [K_L + G(\dot{\sigma}_*, \dot{U}_*)] = 0$ [4]. Если возможна линеаризация начального состояния и $\dot{E} = \lambda \dot{E}^*$ при $\dot{p}_s = \lambda \dot{p}_s^*$, $\dot{p}_v = \lambda \dot{p}_v^*$, $\dot{\sigma} = \lambda \dot{\sigma}^*$, задача (I5) сводится к задаче на собственные значения:

$$[K_L + \lambda G_L] \tilde{U} = 0, \quad [G_{Lij}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial \tilde{U}_i \partial \tilde{U}_j} \int_V (B \dot{E}_L^* - \dot{\sigma}^* \beta) \tilde{E} dv \right]. \quad (I8)$$

Считая $\tilde{p}_v = 0$, $\tilde{p}_s = 0$, $\tilde{u} = \bar{u} \sin \omega t$ и поступая аналогично изложенному, получаем уравнения свободных колебаний:

$$\{[K_L + G(\dot{\theta}, \dot{U})] - \omega^2 M\} \bar{U} = 0, \quad \bar{U} \neq 0,$$

где матрица масс M есть

$$[M_{ij}] = \left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{U}_i \partial \bar{U}_j} \frac{1}{2} \int_V \rho \bar{U}^2 dV \right]. \quad (I9)$$

Глобальные матрицы K_L , G , G_L и M в уравнениях (I6) — (I9) находятся поэлементным суммированием матриц конечных элементов, компоненты которых в настоящей работе определяются по точным аналитическим зависимостям. При этом локальный вектор перемещений U^e имеет структуру, отличную от $U(e \in i, j, K)$:

$$U^e = [u_{rs}^i, u_{\theta s}^i, \dots, u_{zs}^k, u_{re}^i, u_{\theta e}^i, u_{ze}^i, \dots, u_{ze}^k]^T \quad (\dim U^e = 18),$$

позволяющую учесть все типы симметрии при построении K_L^e , M^e , G^e , G_L^e ($\dim = 18 \times 18$). Структура матриц K_L^e и G^e (G_L^e) одинакова и показана на рис. I.

Для вычисления всех компонент этих матриц достаточно получить лишь по 12 выражений, зависящих от индексов. M^e имеет еще более простую структуру (рис. 2), все ее компоненты находят по одному соотношению. Указанные обстоятельства существенно упрощают численную реализацию рассматриваемых сложных задач.

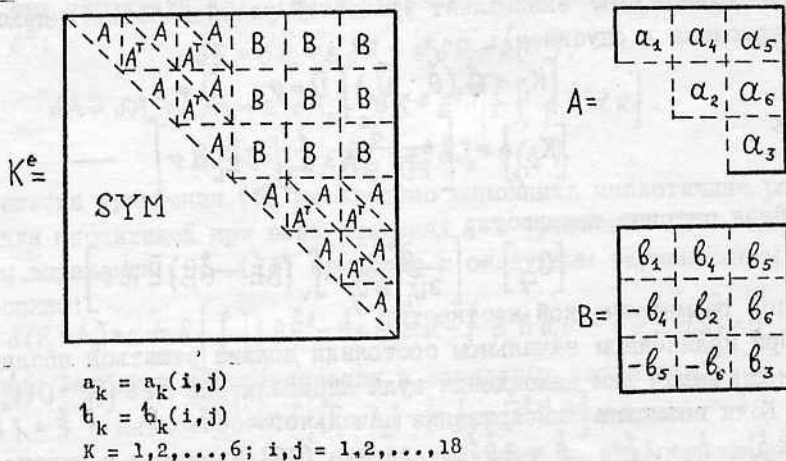


Рис. I

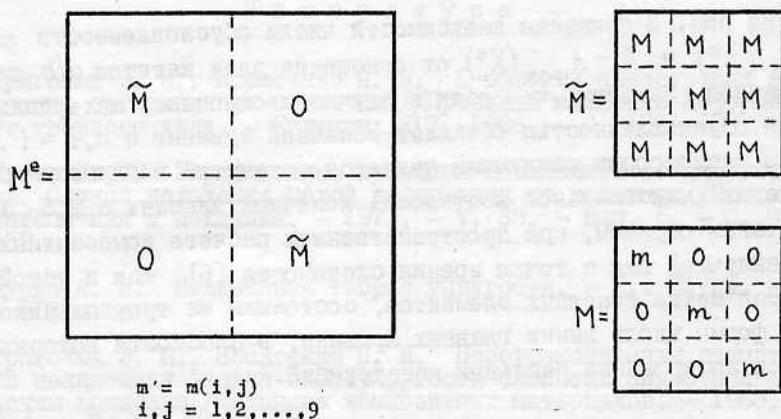


Рис. 2

Разрешимость поставленных задач определяется многими факторами: геометрией и структурой оболочки, изменяемостью нагрузок, механическими характеристиками слоев. При пространственном расчете оболочек наилучшую сходимость обеспечивают вытянутые вдоль линии главных кривизн конечные элементы [6].

Устойчивость решения определяется анизотропией механических свойств и отношениями длин сторон КЭ, при этом обусловленность глобальной матрицы жесткости находится в прямой зависимости от собственных значений K_L^e [7]:

$C_n(K_L) = [\lambda_{\max}(K_L^e) q] / [\lambda_1(L) \lambda_1(M)]$, где q — максимальное число конечных элементов, сходящихся в одном узле; $\lambda_1(L)$ и $\lambda_1(M)$ — фиксированные характеристики континуальной и дискретной краевых задач. Улучшение обусловленности K_L для регулярной сетки возможно лишь минимизацией максимального собственного значения матрицы жесткости конечных элементов.

На основе метода итераций в подпространстве [8], используемого для решения задач (I8), (I9), задача минимизации $\lambda_{\max}(K_L^e)$ была решена численно для матрицы жесткости, соответствующей нулевой гармонике для двух материалов: боропластика [I] с углом армирования 30° по отношению к оси вращения $Z(c)$ и изотропного материала с $\nu = 0,3$ и $E = 1$ МПа (h). Был рассмотрен конечный элемент в форме прямоугольного треугольника площадью $0,32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, меньший радиус $R = 0,1 \text{ м}$.

На рис. 3 показаны зависимости числа обусловленности $\mathcal{X} = \lambda_{\max}(K_L^e) / \lambda_{\min}(K_L^e)$ и $\Lambda = \lambda_{\max}(K_L^e)$ от отношения длин катетов a/b для обоих материалов. Заметим, что если в случае изотропного материала наилучшей обусловленностью обладает конечный элемент с $a/b \approx 1$, то в случае анизотропии наилучшим является вытянутый в меридиональном направлении (максимальной жесткости) конечный элемент с $2,5 < a/b < 4$.

Таким образом, при пространственном расчете композитных оболочек наилучшей как с точки зрения сходимости [6], так и устойчивости является сетка конечных элементов, состоящая из треугольников вытянутой формы вдоль линии главных кривизн, в плоскости которых производится армирование реальных конструкций.

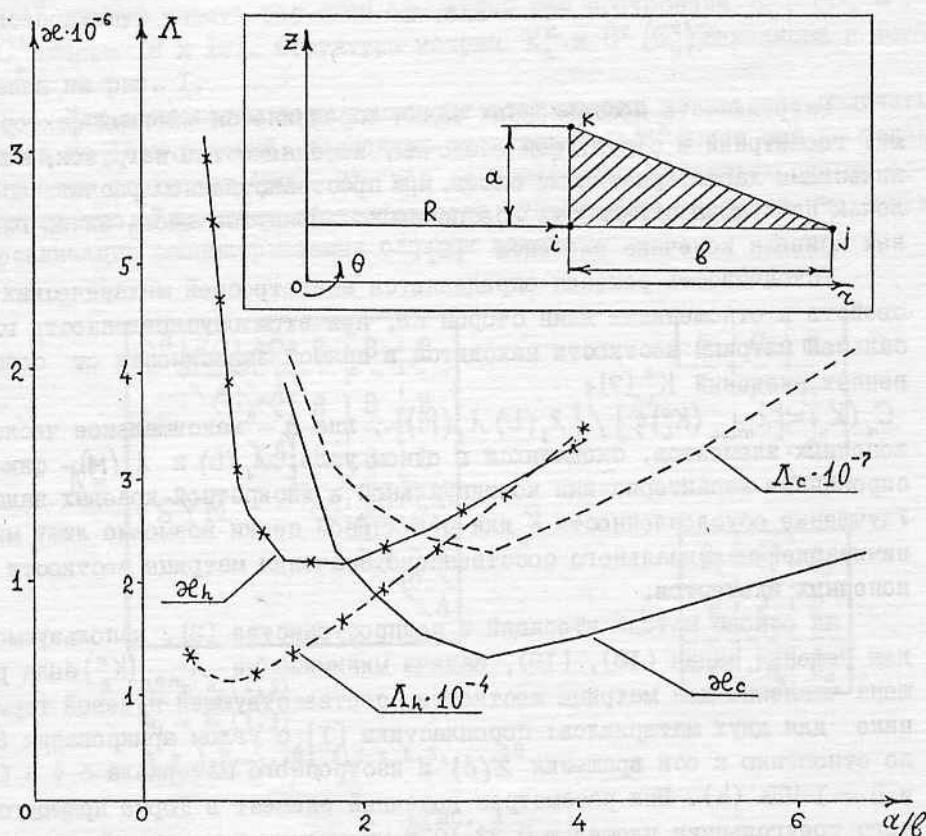


Рис. 3

Л и т е р а т у р а

1. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках//Проблемы механики деформируемого твердого тела. - Калинин: КТУ, 1986. - С. 120—129.
2. Зубов Л. М. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную//Прикладная математика и механика. - 1971. - Т. 35. - Вып. 5. - С. 848—852.
3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука. - 1980. - 512 с.
4. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения//Механика композитных материалов. - 1988. - № 4. - С. 684—690.
5. Вильсон Е. Л. Расчет на прочность осесимметричных тел/Ракетная техника и космонавтика. - 1965. - Т. 3. - № 12. - С. 124—131.
6. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. О пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций; Ред. ЖВМД. - М., 1988. - 20 с. - Деп. в ВИНИТИ 1.06.1988, № 4332-В88.
7. Фрид И. Погрешности дискретизации и вычислительные погрешности для конечных элементов с высоким порядком аппроксимирующих полиномов//Ракетная техника и космонавтика. - 1971. - Т. 9. - № 10. - С. 219—221.
8. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 448 с.